Издательство “Лучшее Решение”
ЖУРНАЛ "1 СЕНТЯБРЯ"

# Методичка

## Решение планиметрической задачи № 16 в ЕГЭ по математике

**Авторы:**

**Коренева Н.А. и Солниченко М.Ю.**

**МАОУ «Ангарский лицей № 1»**

## Виды задач:

1. Многоугольники и их свойства.
2. Окружности и системы окружностей.
3. Окружности и треугольники.
4. Окружности и четырехугольники.

*«Наиболее глубокий след оставляет то, что тебе удалось открыть самому».*

*ДЖОРДЖ ПОЙА*

## Алгоритм решения задачи:

1. Внимательно прочитать задачу.
2. Выполнить чертеж с буквенными обозначениями.
3. Кратко записать условие задачи.
4. Вычертить отдельные детали на дополнительных чертежах.
5. Составить план действий.
6. Записать решение задачи.
7. Проверить правильность решения и оформления задачи

## Классические схемы решения геометрических задач:

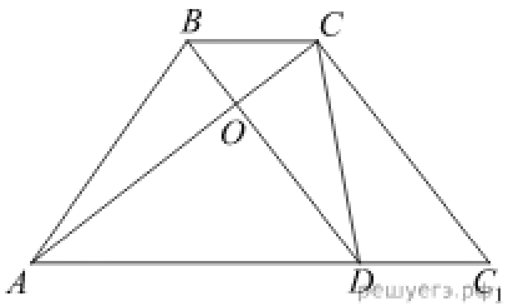
1. В треугольнике проведены высоты.
2. Окружность и две секущие.
3. Произвольные треугольники с общей стороной.
4. Прямоугольные треугольники с общей стороной.

*5. Лемма о трезубце.*

## ***Методика подготовки к решению задачи:***

1. Учим теорию наизусть. Хорошее знание теории – залог успешного решения задачи. Лучшая тренировка на этом этапе – задания из первой части ЕГЭ.
2. Теоремы, которые входят в школьную программу, но не в явном виде, а как вспомогательные задачи, тоже надо знать наизусть.
3. Когда хорошо знаешь все теоремы, формулы, свойства геометрических фигур, то в голове выстраивается логическая цепочка. Например, в условии задачи дан радиус описанной окружности. Зная теорию, понимаешь, что он встречается в теореме синусов и в одной из формул площади треугольника.
4. Разбери 5 классических схем решения задач по геометрии, научись узнавать их в задачах и использовать при решении.
5. Не начинайте сразу решать реальные задачи ЕГЭ. Сначала – задачи на доказательство.
6. Решение планиметрической задачи начинается с построения чертежа, аккуратное выполнение которого помогает найти связи между элементами фигуры и наметить дальнейшие действия.
7. Если на экзамене решите только пункт б), получите 1 балл (из трех) — это лучше, чем ничего.
8. Помните, что пункт *а*) часто содержит подсказку и идею для решения пункта *б*).
9. Помните о методах решения планиметрических задач (метод дополнительных построений, метод параллельного перемещения, метод вспомогательной окружности, метод площадей, удвоение медианы, алгебраические методы).

# <u>Многоугольники и их свойства. Задача 1.</u>




**Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15. Сумма оснований равна 17.**

**а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.**

**б) Найдите площадь трапеции.**

***<u>Решение.</u>***

а) Выполним дополнительное построение. Проведем через точку *C* прямую, параллельную BD. На пересечении этой прямой и прямой *AD* отметим точку $C_1$, $BCC_1D$ – параллелограмм ($BC \parallel DC_1$ – как основания трапеции; $BD \parallel CC_1$ – по построению).

В треугольнике $ACC_1$: $AC = 15$; $CC_1 = BD = 8$, $AC_1 = AD + DC_1 = 17$. Заметим, что $AC^2 + CC_1^2 = AC_1^2$, т.е. $225 + 64 = 289$, тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник $ACC_1$ - прямоугольный, $\angle ACC_1$ прямой. Тогда $\angle COD$ прямой (односторонние углы при параллельных прямых BD и $CC_1$ и секущей AC), что и требовалось доказать.

б) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \sin\angle AOD = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 \cdot 1 = 60$, т.к. $\angle AOD = \angle COD = 90^0$ – смежные углы, а $\sin 90^0 = 1$.

Ответ: б) 60.

## ***<u>ТЕОРИЯ.</u>***

1.Трапеция – четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны.

2. Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

3. Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

4. В параллелограмме противоположные стороны равны.

5. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна $180^0$.

6. Площадь трапеции равна половине произведения её диагоналей на синус угла между ними.

7. Сумма смежных углов равна $180^0$.

8. Метод параллельного перемещения: после перемещения какого-либо отрезка параллельно своему первоначальному положению, его новое положение вместе с первоначальным будет составлять пару противоположных сторон параллелограмма.

## *Задача 2.*

**На отрезке *BD* взята точка *C*. Биссектриса *BL* равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *BC* является боковой стороной равнобедренного треугольника *BLD* с основанием *BD*.**

**а) Докажите, что треугольник *DCL* равнобедренный.**

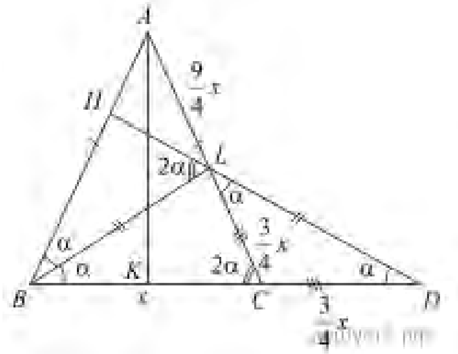
**б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{1}{6}$. В каком отношении прямая *DL* делит сторону *AB*?**

***Решение.***

**а)** Пусть углы при основании *BC* равнобедренного треугольника *ABC* *равны* 2α, тогда углы при основании *BD* равнобедренного треугольника *LBD* равны α. Угол *LCB* является внешним углом треугольника *DCL*, он равен сумме углов, не смежных с ним, $\angle LCB = \angle CDL + \angle CLD$. Следовательно $\angle CLD = \alpha$, значит , треугольник *LCD* равнобедренный.

**б)** Пусть *BC* = x, AK —медиана и высота равнобедренного треугольника *ABC*. Тогда в прямоугольном треугольнике *AKB* имеем:

BK = $\frac{x}{2}$, $\cos\angle ABK = \frac{1}{6}$ , откуда AB = AC=$\frac{BK}{\cos\angle ABK}$ =3*x*.

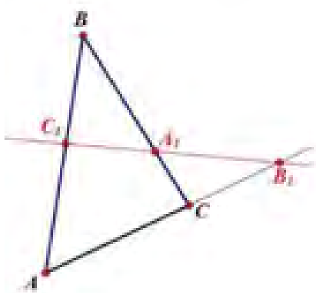



Биссектриса *BL* делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:$\frac{AL}{LC}=\frac{AB}{BC}= \frac{3}{1}$, поскольку AC=3*x*, получаем LC=$\frac{1}{4}$ AC=$\frac{3}{4}$ *x*. В пункте а) было доказано, что треугольник *LCD* равнобедренный, поэтому CD=LC=$\frac{3}{4}$ *x*. Применим теорему Менелая к треугольнику *ABC*: $\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CL}{LA} = \frac{AH}{HB}\cdot\frac{7x}{3x}\cdot\frac{1}{3} = \frac{AH}{HB}\cdot\frac{7}{9} = 1$, откуда $\frac{AH}{HB} = \frac{9}{7}$.

Ответ: 9: 7 (или 7: 9).

## ***ТЕОРИЯ***

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
2. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
3. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.




**4.** Теорема Менелая: пусть прямая пересекает треугольник ABC, причем $C_1$ – точка её пересечения со стороной AB, $A_1$ – точка её пересечения со стороной BC, $B_1$ - точка её пересечения с продолжением стороны AC. Тогда:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

## Окружности и системы окружностей. Задача 1.

**Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.**

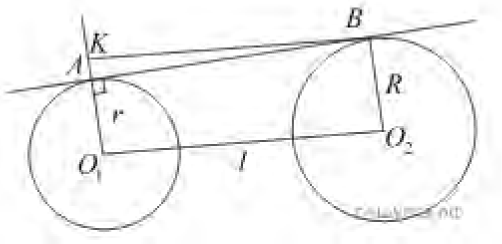
***Решение.***

Обозначим центры окружностей точками $O_1$ и $O_2$, точки касания A и $B$. Проведем через точку $B$ прямую ВК, параллельную $O_1O_2$, тогда $BK = O_1O_2 = l$. Треугольник $ABK$ — прямоугольный, т.к. радиус r перпендикулярен касательной, т.е. $\angle O_1AB = 90^0$.

Обозначим радиусы окружностей $R$ и $r$, расстояние между центрами окружностей $l$.

*Возможны два случая расположения окружностей и общей касательной.*

*Первый случай.* Окружности лежат по одну сторону от касательной.



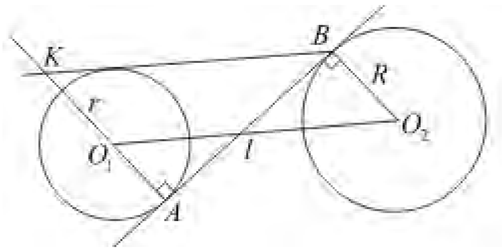

В прямоугольном треугольнике $ABK$, $AK = R - r$, по теореме Пифагора, находим:

$$AB = \sqrt{l^2 - (R-r)^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30,$$

*Второй случай.* Окружности лежат по разные стороны от касательной.

В прямоугольном треугольнике $ABK$, $AK = R + r$.

$$AB = \sqrt{l^2 - (R+r)^2} = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16.$$




Ответ: 30 или 16

***ТЕОРИЯ.***

1.Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

2.Теорема Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

## *Задача 2.*

**Окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ пересекаются в точках A и B, причём точки $O_1$ и $O_2$ лежат по разные стороны от прямой AB. Продолжения диаметра CA первой окружности и хорды CB этой же окружности пересекают вторую окружность в точках D и E соответственно.**

**а) Докажите, что треугольник CBD подобен треугольнику, вершины которого — центры окружностей и точка A.**

**б) Найдите AD, если $\angle DAE = \angle BAC$, радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и AB=3.**

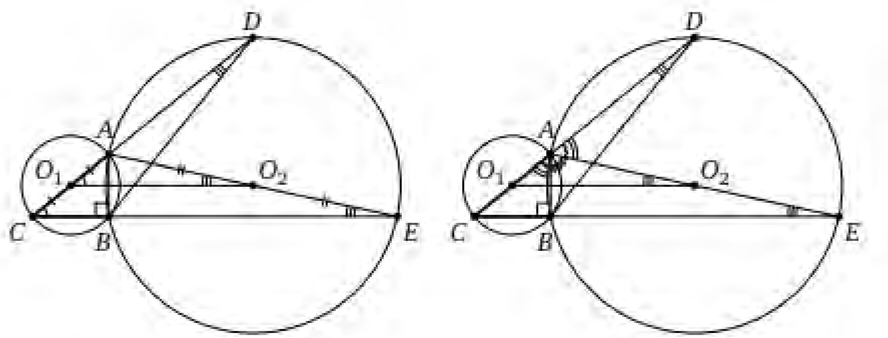
***Решение.*** а) Поскольку $\angle ABE = 90°$, отрезок AE — диаметр окружности с центром $O_2$. Значит, точка $O_2$ — середина стороны AE треугольника CAE, а отрезок $O_1O_2$ — средняя линия этого треугольника, поэтому $\angle AO_2O_1 = \angle AEC$, $\angle AO_1O_2 = \angle ACE = \angle DCB$, а так как вписанные во вторую окружность углы ADB и AEB опираются на одну и ту же дугу, то $\angle AO_2O_1 = \angle AEC = \angle AEB = \angle ADB = \angle CDB$,

следовательно, $\Delta\, CBD \sim \Delta\, O_1AO_2$ по двум углам.

б) Заметим, что $\angle BAD = \angle BAE + \angle DAE = \angle BAE + \angle BAC = \angle EAC$, а так как $\angle BDA = \angle BEA = \angle CEA$, то $\Delta ABD \sim \Delta ACE$ по двум углам.

Значит, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = 3$. Следовательно, AD =3AB=9.

Ответ: 9.




### ***ТЕОРИЯ.***

1.В прямоугольном треугольнике гипотенуза является диаметром описанной окружности.

2.Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины его сторон.

3.При пересечении двух прямых секущей, соответственные углы равны.

4.Вписанные углы в окружности, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

5.Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.

# ***Окружности и треугольники.***

**На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AP и CQ соответственно.**

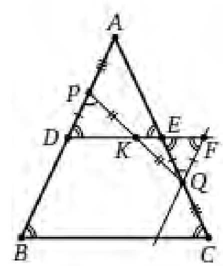
**а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная его основанию, проходит через середину отрезка PQ.**

**б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключённого внутри описанной окружности треугольника ABC, если AB = AC = BC = $3\sqrt{2}$, CQ = AP = $\sqrt{2}$.**

***Решение.***

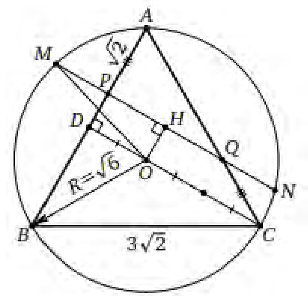
а) Пусть D и E — середины сторон AB и AC соответственно. Через точку Q проведём прямую, параллельную AB. Пусть эта прямая пересекает прямую DE в точке F, а прямые PQ и DE пересекаются в точке K.

Δ EQF равнобедренный, поэтому FQ =QE = DP. Значит, ΔQKF = ΔPKD по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, KQ = KP, т. е. середина K отрезка PQ лежит на средней линии DE.




б) Пусть O — центр окружности радиуса R, описанной около равностороннего треугольника ABC, прямая PQ пересекает эту окружность в точках M и N, точка H — проекция точки O на хорду MN. Тогда H — середина искомого отрезка MN. Точка D — середина стороны AB равностороннего ΔABC, поэтому CD — высота треугольника ABC. Тогда

$R = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{6},$ а так как, $\frac{AP}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = \frac{2}{3} = \frac{AQ}{AC},$




то PQ ∥ CD. Тогда OHPD — прямоугольник, значит, $OH = DP = AD - AP = \frac{3}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Из прямоугольного треугольника OHM находим, $MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{6 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}}.$

что

Следовательно, $MN = 2MH = 2\sqrt{\frac{11}{2}} = \sqrt{22}.$

Ответ: $\sqrt{22}$ ***ТЕОРИЯ.***

1.Центр окружности, описанной около треугольника, лежит в точке пересечения его серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника.

2. Треугольник называется равнобедренным, если его боковые стороны равны.

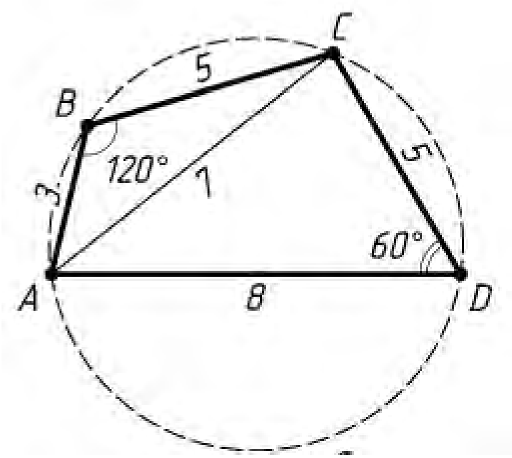
3. Отрезок, соединяющий любые две точки окружности, называется хордой.

# Окружности и четырехугольники.

**В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* известны стороны и диагональ: *AB* = 3, *BC* = CD = 5, *AD* = 8, *AC* = 7.**
**а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.**
**б) Найдите *BD*.**

***Решение.***

а) Надо доказать, что сумма углов B и D равна $180^0$, тогда около четырехугольника ABCD можно описать окружность.




1. В треугольнике ABC применим теорему косинусов и найдем $\angle ABC$:

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$, из этого равенства выразим $\cos\angle ABC$:

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{9+25-49}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2},$$

значит $\angle ABC=120^0$.

2. В треугольнике ACD по теореме косинусов найдем $\angle ADC$:
$AC^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cos\angle ADC$, отсюда следует:

$$\cos\angle ADC=\frac{AD^2+DC^2-AC^2}{2AD\cdot DC}=\frac{64+25-49}{2\cdot8\cdot5}=\frac{1}{2},$$

значит $\angle ADC=60^0$. Сумма противоположных углов четырехугольника ABCD равна $120^0+60^0=180^0$, следовательно около него можно описать окружность.

б) Длину диагонали BD найдем по теореме Птолемея:

$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$, $7BD=3\cdot5+8\cdot5$, $7BD=55$, $BD=\frac{55}{7}$

Ответ: $BD=\frac{55}{7}$

***ТЕОРИЯ.***

1.Теорема косинусов: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на косинус угла между ними.
2. Признак вписанного четырехугольника: во вписанном четырехугольнике суммы противоположных углов равны$180^0$.

3.Теорема Птолемея: во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон.

# ***Некоторые полезные факты геометрии.***

## ***Треугольник.***

- Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.
- Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы
- Медиана разбивает треугольник на два равновеликих.
- Три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих.
- *Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.* Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.
- Если $BB_1$ и $CC_1$ — высоты треугольника ABC, то треугольник $AB_1C_1$ подобен треугольнику ABC, причём коэффициент подобия равен $|\cos\angle A|$.
- Если H - точка пересечения высот треугольника ABC, а O - центр его описанной окружности, то отрезок AH вдвое больше расстояния от точки O до середины стороны BC.
- Формулы для площади треугольника. Если $a$, $b$ и $c$ — стороны треугольника, $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — противолежащие им углы, $h_a$, $h_b$ *и* $h_c$ — высоты, проведённые из вершин этих углов, $p$ — полупериметр треугольника, $R$ — радиус описанной окружности, $r$, $r_a$ , $r_b$ *и* $r_c$ — радиусы вписанной и вневписанных окружностей, касающихся сторон $a$, $b$ и $c$ соответственно, а $S$ — площадь треугольника, то

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr, \quad S = (p-a)r_a,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(формула Герона)},$$

$$S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \quad S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}, \quad S = \frac{h_b h_c}{2\sin\alpha}, \quad S = \sqrt{rr_ar_br_c}.$$

- *Вневписанная окружность* касается одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон. У любого треугольника три вневписанных окружности. *Центром вневписанной окружности* в треугольник является точка пересечения биссектрис двух внешних углов треугольника и биссектрисы внутреннего угла, не смежного с этими двумя.

6 биссектрис треугольника (3 внутренние и 3 внешние) пересекаются по три в четырех точках: центрах вписанной и трех вневписанных окружностей. *Радиусом вневписанной окружности* является отрезок перпендикуляра, проведенный из центра окружности к какой-либо стороне треугольника или её продолжению.

- Если $m_c$ — медиана треугольника, проведённая к стороне $c$, то $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где $a$ и $b$ — остальные стороны треугольника.
- *Теорема Менелая.* Дан треугольник ABC. Некоторая прямая пересекает его стороны AB, BC и AC (или их продолжения) в точках $C_1$ , $A_1$ , $B_1$ соответственно. Тогда

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

- *Теорема Чевы.* Пусть точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ принадлежат сторонам соответственно BC, AC и AB треугольника ABC. Прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$

## Четырехугольник.

- Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.
- Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.
- Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.
- Площадь четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.
- Площадь любого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.
- Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.
- Из всех параллелограммов только около прямоугольника и квадрата можно описать окружность с центром в точке пересечения диагоналей.
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
- *Теорема Птолемея.* Сумма произведений противоположных сторон вписанного четырёхугольника равна произведению его диагоналей.

## Трапеция.

- Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полу разности оснований.
- Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полу разности.
- Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полу разности оснований, а проекция диагонали на основание равна полу сумме оснований.

- Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна её средней линии.
- Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.
- Только около равнобедренной трапеции можно описать окружность.
- Площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению её оснований.
- Биссектрисы углов, прилегающих к боковой стороне трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции.
- *Замечательное свойство трапеции.* Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

## Угол.

- Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.
- Биссектрисы внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

## Окружность.

- Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.
- Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.
- Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.
- Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.
- Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.
- Окружность симметрична относительно центра и относительно любого своего диаметра.
- Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.
- Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.
- Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания.
- Радиус $r$ окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами $a$, $b$ и гипотенузой $c$, равен $r=\frac{a+b-c}{2}$.
- Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.
- Угол между пересекающимися хордами равен полу сумме противоположных дуг, высекаемых хордами.
- Угол между двумя секущими равен полу разности дуг, высекаемых секущими на окружности.
- *Формула Эйлера*. Если $O_1$, $O_2$ — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, а $r$ и $R$ — радиусы этих окружностей, то $O_1O_2=\sqrt{R^2-2rR}$.
- Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.

- Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.
- Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.